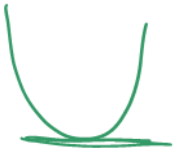
$y = x^2 \rightarrow y' = 2x$



$A\left|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right.$ m

$y - y_1 = m(x - x_1)$

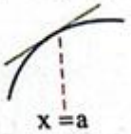
مشتق

تعریف مشتق

- **تعریف اول:** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
- **تعریف دوم:** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

خط مماس برمنحنی

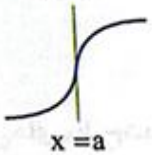
- شیب خط مماس برنمودارتابع f درنقطه‌ای به‌طول a واقع برنمودار f برابراست بامشتق تابع f در $x = a$ ،یعنی $m = f'(a)$
- اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x = a$ ، مثبت باشد، آن‌گاه: $f'(a) > 0$



- اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x = a$ ، منفی باشد، آن‌گاه: $f'(a) < 0$

- اگر خط مماس بر نمودار تابع f در $x = a$ ، افقی باشد، آن‌گاه: $f'(a) = 0$

- اگر خط مماس بر نمودار تابع f در $x = a$ ، قائم باشد، آن‌گاه: $f'(a) = \infty$



- معادلهٔ خط مماس بر منحنی f در $x = a$ روی منحنی: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$f'(a)$ در صورت وجود، همان شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ a است. درست

اگر خط مماس بر تابع f در نقطهٔ $x=۲$ افقی باشد، آن‌گاه $f'(۲)=۰$. درست

در تابع $f(x)=۳$، مشتق تابع در همهٔ نقاط، صفر است. درست

اگر مشتق تابع f در $x=a$ منفی باشد، آن‌گاه مقدار تابع f در $x=a$ منفی است. نادرست

اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$، آن‌گاه شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول ۲، برابر ۶ است. درست

$f'(۲)=۶$

جاهای خالی را با اعداد یا عبارت‌های مناسب پر کنید.

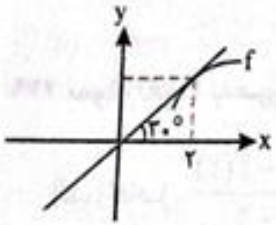
اگر شیب خطی ۱- باشد، علامت مشتق آن خط ..... منفی ..... است.

اگر $f'(۲) = -۳$ باشد، آن‌گاه شیب خط مماس بر تابع f در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ ..... منفی ..... است. (منفی / مثبت)

اگر شیب خط مماس بر تابع f در $x = -۱$ ، برابر ۲ باشد، آن‌گاه ..... $f'(-۱) = ۲$ ..... . $(f'(۲) = -۱ / f'(-۱) = ۲)$

با توجه به نمودار مقابل، مشتق تابع f در $x = ۲$ برابر ..... $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ..... است.

$m = \tan ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$



اگر $f(۰) = ۰$ و $\lim_{x \to ۰} \frac{f(x)}{x} = ۲$ باشد، آن‌گاه ..... ۲ ..... $f'(۰) =$.

$f'(۰) = ۲$

مشتق تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق، در نقطه‌ای به طول $x=-1$ به دست آورید.

با استفاده از تعریف مشتق، مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطهٔ داده‌شده بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-1}\ ,\ x=5$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}$$

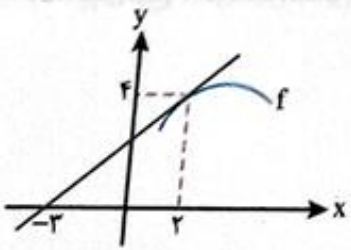
$$=3$$

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\times\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\cancel{x-5}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{4}$$

با توجه به نمودار مقابل، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-۴}{x-۲}$ را تعیین کنید.

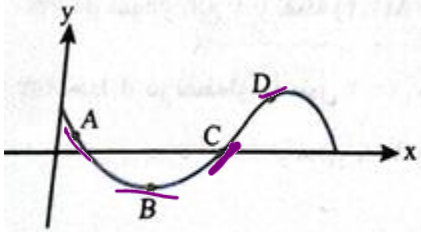


$= f'(۲)$

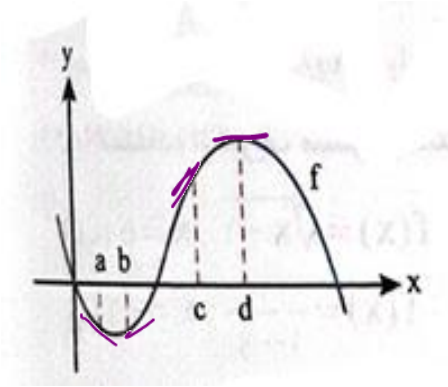
-۳	۲
۰	۴

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴-۰}{۲+۳} = \frac{۴}{۵} = f'(۲)$$

نقاط داده‌شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول، نظیر کنید.



شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲-
نقطه	C	B	D	A

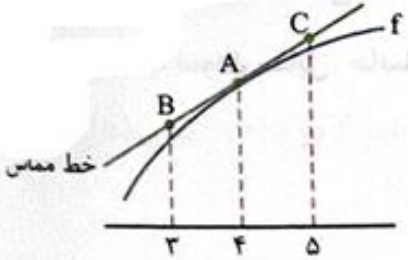


. با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل، نقاط به طول‌های a ، b ، c و d را با مشتق‌های داده‌شده در جدول، نظیر کنید.

x	d	b	c	a
f′(x)	۰	۰/۵	۲	−۰/۵

۱۱

.. برای تابع f در شکل مقابل، داریم $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۴$. با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.



$f'(۴)=۱/۵$

$f(۴)=۲۴$

$A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\end{matrix}\right.$

$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$f'(۴)=\dfrac{f(۴)-f(۳)}{۴-۳} \to ۱/۵=\dfrac{۲۴-f(۳)}{۱}$

$۱/۵=۲۴-f(۳) \to f(۳)=۲۲/۵$

$B\left|\begin{matrix}۳\\۲۲/۵\end{matrix}\right.$

$\cancel{f'(۴)}^{۱/۵}=\dfrac{f(۵)-\cancel{f(۴)}^{۲۴}}{\cancel{۵-۴}_{۱}} \to f(۵)=۲۵/۵$

$C\left|\begin{matrix}۵\\۲۵/۵\end{matrix}\right.$

اگر نمودار تابع f از نقطهٔ A(۲,۴) بگذرد و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۳$ باشد، معادلهٔ خط مماس بر نمودار f را در نقطهٔ A به دست آورید.

$y-y_1=m(x-x_1)$

$A\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.$

$f'(۲)=۳$

$y-۴=۳(x-۲)$

$\boxed{y=۳x-۲}$

با توجه به نمودارهای توابع f و g ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}$ ، چند برابر $f'(۲)$ است؟ (خرداد ۱۴۰۲)

$$\lim_{x\to ۲} g(x)\frac{(f(x)-۳)}{x-۲}$$

$$\lim_{x\to ۲} g(x) \times \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}$$

$$۵\times f'(۲)$$

خط به معادلهٔ $y=3x-2$ در نقطهٔ $x=2$ بر منحنی پیوستهٔ $y=f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-4f(x)}{x-2}$ را به دست آورید.

$f'(2)=3$

$f(2)=6-2=4$

$\lim \frac{16-16}{0}=\frac{0}{0}$

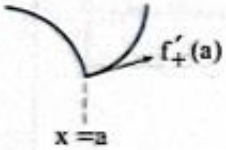
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)\,(f(x)-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2} f(x)\times \underbrace{\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}}_{f'(2)}$

$4\times f'(2)$

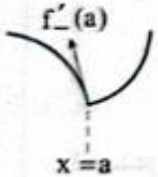
$4\times 3=12$

مشتق‌پذیری و پیوستگی

مشتق‌های یک‌طرفه



مشتق راست: برای تابع f در $x=a$، مشتق راست را با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهند و برابر مقدار شیب نیم‌مماس راست در $x=a$ است.



مشتق چپ: برای تابع f در $x=a$، مشتق چپ را با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهند و برابر مقدار شیب نیم‌مماس چپ در $x=a$ است.

مشتق‌پذیری در نقطه

در نقطهٔ $x=a$: تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱) f در $x=a$ پیوسته باشد. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

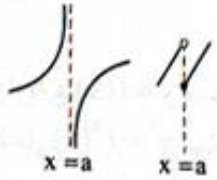
۲) مشتق‌های چپ و راست تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند. $f'_+(a)=f'_-(a)$

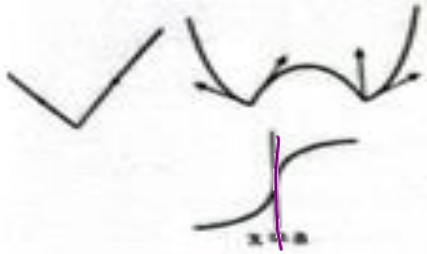
مشتق‌پذیری روی بازه

- تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است، هرگاه روی همهٔ نقاط این بازه مشتق‌پذیر باشد.
- تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ $x=a$ مشتق راست و در نقطهٔ $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.
- تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ مشتق‌پذیر است، هرگاه روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ $x=a$ مشتق راست داشته باشد.
- تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

نقاط مشتق‌ناپذیر

۱) **ناپیوستگی:** اگر تابع f در $x=a$، پیوسته نباشد، مشتق‌پذیر هم نیست.





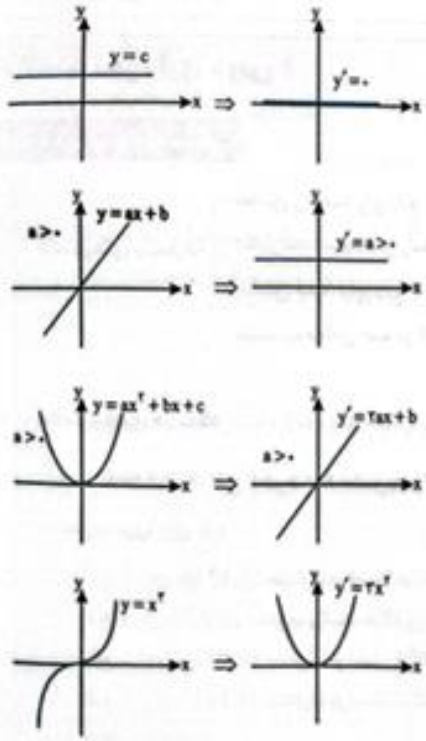
۲ نابرابری مشتق‌های چپ و راست: اگر تابع f در $x = a$، پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست در $x = a$ هر دو موجود باشند ولی برابر نباشند، آن‌گاه f در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است. به این نقاط، «نقاط گوشه‌ای» می‌گویند.

۳ نامتناهی‌شدن مشتق: اگر خط مماس در $x = a$، قائم باشد، خط $x = a$ را «مماس قائم» می‌گوییم و تابع در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

فرمول‌های مشتق

- مشتق تابع ثابت: $y = k \Rightarrow y' = 0$
- مشتق تابع خطی: $y = ax + b \Rightarrow y' = a$
- مشتق $y = x^n$: $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$
- مشتق $y = \sqrt[n]{x^m}$: $y = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
- مشتق $y = \sqrt{ax + b}$: $y = \sqrt{ax + b} \Rightarrow y' = \dfrac{a}{2\sqrt{ax + b}}$
- مشتق جمع و تفریق: از تک‌تک جملات جداگانه مشتق می‌گیریم.
- مشتق حاصل‌ضرب: (مشتق اولی × دومی) به اضافهٔ (مشتق دومی × اولی)! $y = f \times g \Rightarrow y' = f'g + g'f$
- مشتق تقسیم: (مشتق صورت × مخرج) منهای (مشتق مخرج × صورت) تقسیم بر (مخرج به توان ۲)! $y = \dfrac{f}{g} \Rightarrow y' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$
- مشتق تابع مرکب: $y = (fog)(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$

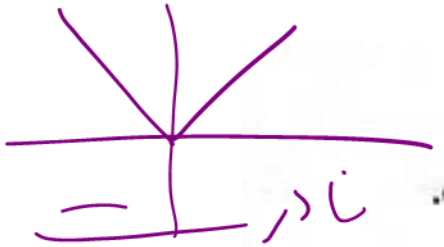
رسم نمودار f' از روی نمودار f



- مشتق تابع ثابت برابر صفر است.
- مشتق تابع خطی، تابع ثابت است.
- مشتق تابع درجه دوم، یک خط است.
- مشتق تابع $y = x^3$، برابر $y' = 3x^2$ است.

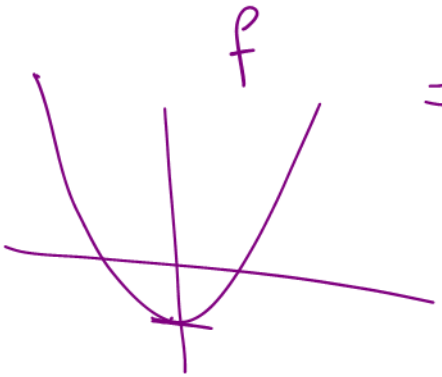
مشتق مرتبه دوم: اگر از تابع $y = f(x)$ مشتق بگیریم، تابع مشتق یعنی $y' = f'(x)$ به دست می‌آید. حال اگر از تابع مشتق مجدداً مشتق بگیریم، مشتق مرتبه دوم که به شکل $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم، به دست می‌آید.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.



اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آن‌گاه f در a مشتق‌پذیر است. نادرست

اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این نقطه پیوسته است. درست



توابع چندجمله‌ای روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند. درست

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطهٔ $x = 0$ مشتق‌پذیر است. نادرست

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در نقطهٔ $x = 0$ مماس قائم دارد. درست

تابع $y = [x]$ در صفر مشتق‌پذیر است. نادرست

. دامنهٔ تابع مشتق $f(x)=[x]$ ، $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ است.

نادرست

نقطهٔ $(1,1)$ یک نقطهٔ گوشه‌ای برای تابع $f(x)=|2-x^2|$ است.

$x=\pm\sqrt{2}$

درست

اگر $f(x)=x+1$ باشد، آن‌گاه $f'(0)=1$.

$f'(x)=1$

اگر $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ، آن‌گاه $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}$.

نادرست

$f(x)=x^{\frac{2}{3}} \to f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\times 1 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

. اگر $y=3x^3+2x^2-1$ باشد، مقدار عددی $y'(-1)$ برابر ۵ است.

درست

$9x^2+4x$

اگر $f'(2)=3$ و $g'(2)=5$ باشد، آن‌گاه $(2g-f)'(2)=2$.

نادرست

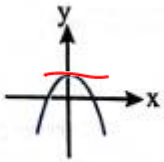
$2g'(2)-f'(2)$

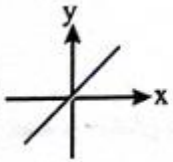
$10-3=7$

اگر $f(0)=1$ ، $f'(0)=1$ و $g'(1)=-1$ باشد، آن‌گاه $(gof)'(0)=-1$.

درست

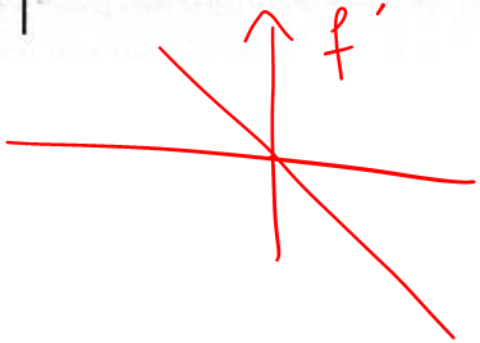
$f'(0)\times g'(f(0))=1\times -1=-1$

اگر نمودار f به‌صورت 

باشد، آن‌گاه نمودار مشتق آن به‌صورت 

است.

نادر



جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید.

اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در $x=a$، ..... است. پیوسته

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، مشتق‌پذیر ..... . نیست

در صورت وجود، $f'_+(a)$ را شیب ..... بر تابع در $x=a$ می‌گوییم. مماس

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=0$ را ..... منحنی می‌نامیم. مماس

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ ..... مشتق‌پذیر است. $(0,+\infty)$

اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $g'(3)=4$، $g(3)=8$، $f'(3)=2$ و $f(3)=5$ باشد، مقدار $(\frac{f}{g})'(3)$ برابر ..... است. $-\frac{1}{16}$

$$\frac{f'(3)\times g(3)-g'(3)f(3)}{g^2(3)}=\frac{2\times 8-4\times 5}{64}=\frac{-4}{64}=-\frac{1}{16}$$

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x|$، مقدار $f'(0)$ برابر ..... است. ۰

اگر $f(x)=-x^3$، آن‌گاه $f''(1)$ برابر است با ..... . -6

$-3x^2$

$-6x$

اگر $f(x)=2x^4-3x^2$ باشد، $f''(0)$ برابر ..... است. -6

$f'(x)=8x^3-6x$

$f''(x)=24x-6$

اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x<0 \\ x & ; \ x\geq 0 \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند، ولی $f'(0)$ موجود نیست.

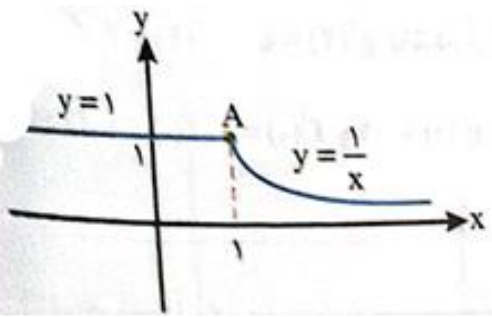
اگر m_1 شیب نیم‌مماس چپ و m_2 شیب نیم‌مماس راست تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+x & ; \ x\geq 0 \\ -x^2-2x & ; \ x<0 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ باشد، مقدار m_1-m_2 را به دست آورید.

$m_1 = 1 \longrightarrow 2x+1$

$m_2 = -2 \longrightarrow -2x-2$

$1-(-2)=3$

با محاسبهٔ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطهٔ A ، نشان دهید که تابع f در A مشتق‌پذیر نیست.



$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{\cancel{1-x}^{\,-1}}{x}}{\cancel{x-1}} = -1$$

$$f'_-(1) = \lim \frac{1 - 1}{x - 1} = 0$$

در A مشتق‌پذیر نیست

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.)

$f(x)=(x^{۴}-۳x)^{۵}$

$f'(x)=۵(x^{۴}-۳x)^{۴}\times(۴x^{۳}-۳)$

$f(x)=(x^{۲}+۲x+۱)^{۵}$

$f'(x)=۵(x^{۲}+۲x+۱)^{۴}\times(۲x+۲)$

$f(x)=(\frac{x^{۲}}{۳}-x)^{۵}$

$g(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۳}$

$g'(x)=۶x(۲x-۵)^{۳}+۳(۲x-۵)^{۲}\times۲(۳x^{۲}-۴)$

$f(x)=x(x-۱)(x+۱)$

$f(x)=\frac{-۲x+۳}{x+۴}$

$$y = \frac{۱}{x}(۲\sqrt{x} - ۱)^{۴}$$

$$f(x)=(x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$$

$$g(x) = (\frac{۱}{x})(\sqrt{۳x+۲})$$

$$g(x) = (\frac{۱}{x})(x^{۲} + ۵x)^{۷}$$

$$g(x)=(\sqrt{۳x+۱})(x^{۲}+۲x)$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{۹(x+۱)-۱(۹x-۲)}{(x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۹x-۲}{x+۱}}}$$

$$f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۴)$$

مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را به دست آورید و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

$x=0$

$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

خط $y = 3x + 3$ در $x = 2$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $(gof)'(2)$ را بیابید.

$f'(2) \times g'(\cancel{f(2)}\ 9)$

$3 \times \left(1 + \frac{1}{6}\right)$

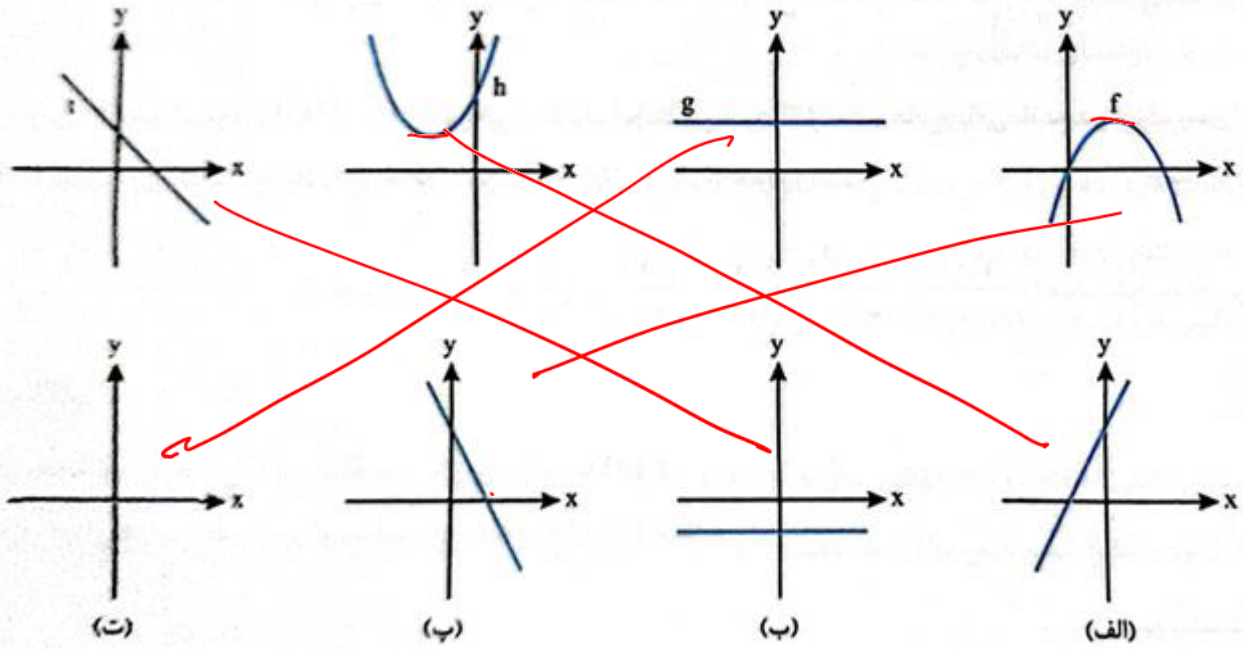
$3 \times \frac{7}{6} = \frac{21}{6}$

$g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\begin{array}{|l} 2 \\ 9 \end{array}$

$f'(2) = 3$

نمودار توابع f ، g ، h و t را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.



آهنگ تغییرات

آهنگ متوسط: آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه‌ای مانند $[a,b]$ برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

آهنگ لحظه‌ای: آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است با: $f'(a)$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

. تابعی وجود دارد که آهنگ لحظه‌ای تغییر و آهنگ متوسط تغییر در هر نقطه از دامنهٔ آن، با هم برابر است.

. آهنگ متوسط تغییر تابعی مانند f در بازهٔ [۰ , ۱] ، همیشه کمتر از شیب آن منحنی در هر نقطه است. نادرست

. اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ متوسط تغییر آن، همواره صعودی است. درست

اگر آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ [a , b] صفر باشد، f تابعی ثابت است. درست

جاهای خالی را با اعداد یا عبارت‌های مناسب پر کنید.

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x = a$ ، برابر $f'(a)$ است.

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطهٔ $x = \frac{۱}{۴}$ ، برابر ۱ است.

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^۳$ در بازهٔ $[۰, ۲]$ ، برابر ۴ است.

$\frac{8-0}{2}$

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = ۲x - ۱$ در بازهٔ $[۱, ۳]$ ، برابر ۲ است.

$\frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2}$

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ را وقتی متغیر x از $x_۱=۲$ به $x_۲=۷$ تغییر می‌کند، به دست آورید.

متوسط: $\frac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲}=\frac{۳-۲}{۵}$

خودرویی در امتداد خط راست، طبق معادلهٔ مسافت $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \le t \le 5$ برحسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چه‌قدر است؟

$d'(t) = -10t + 20$

$d'(2) = -20 + 20 = 0$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = ۵(۱ - \frac{x}{۳})^۲$ را در $x = ۶$ به دست آورید.

معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^{۲} - t - ۱۰$ برحسب متر در بازهٔ $[۰,۵]$ (t برحسب ثانیه)، داده شده است. سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $[۰,۵]$ و سرعت لحظه‌ای را در لحظهٔ $t = ۲$ به دست آورید.

. جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت را به طرف بالا، مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادلهٔ

گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظهٔ $t=0$ ، سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف، پس از t ثانیه از رابطهٔ $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به دست آید، در چه زمانی آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم، برابر آهنگ متوسط تغییر آن در بازهٔ $[0,100]$ است؟

.. آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x-\frac{1}{x}$ در بازهٔ $[1,4]$ ، با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در $x=a$ برابر است. a را پیدا کنید. $(a\in[1,4])$